اسرار بي نهايت ∞

بي نهايت حقيقتا عجيب و شگفت انگيز است. فرض كنيد بي نهايت عدد سيب داشته باشيد حال اگر يك سيب از سيب هاي خود را به دوستتان بدهيد، باز هم همان بي نهايت سيب را داريد و حتي يك سيب هم از سيب هايتان كم نشده است ! حال فرض كنيد در حساب بانكي خود بي نهايت تومان پول داشته باشيد . در اين صورت مي توانيد بي نهايت تومان از حساب بانكي خود برداشت كنيد و به دوستانتان ببخشيد و در موجودي حسابتان هيچ تغييري ايجاد نخواهد شد. شما هنوز هم بي نهايت ثروتمنديد و حتي يك تومان هم نسبت به قبل كمتر نداريد و اين در حالي است كه اكنون دوستان شما نيز مانند شما بي نهايت ثروتمند شده اند.

اگر از اين مثال ها حيرت زده شده ايد، هيچ جاي تعجب نيست؛ جرا كه فيلسوف ها و رياضيدان ها هم در مواجهه با بي نهايت دقيقا همين حس شما را دارند. آنها هم قرن هاست كه در جستجوي پاسخ اين پرسش اسرارآميزهستند: به راستي مفهوم " بي نهايت " چيست؟

تاريخچه

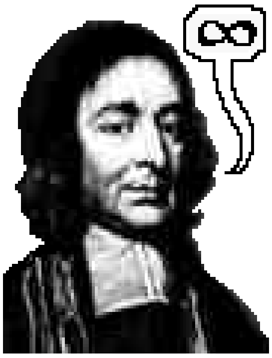
مفهوم شگفت انگيز بي نهايت، از گذشته های دور ذهن رياضی دانان را به خود مشغول كرده بود. هر چند برخی معتقدند كه مفهوم بي نهايت براي نخستين بار در تمدن هند باستان مطرح شده است، اما مي توان گفت كه نخستين كار جدی در مورد بي نهايت در عرصه رياضيات به دوران يونان باستان و تحقيقات اقليدس بر روي اعداد اول باز مي گردد. اقليدس در كتاب مشهور " اصول " خود هر چند مستقيماً نامي از بي نهايت نمي برد، اما به طور ضمنی به آن اشاره مي كند كه " بزرگترين عدد اول، از حاصل ضرب هر تعداد مفروضي از اعداد اول هم بزرگتر است ". پس از اقليدس، پژوهش در مورد بي نهايت توسط ساير رياضی دانان همچنان ادامه يافت تا سرانجام نماد ∞ به عنوان نماد ابن مفهوم اسرارآميز پا به عرصه رياضيات گذاشت.

با آغاز عصر جديد، پژوهش در مورد بي نهايت همچنان ادامه يافت. در اين دوران " گاتفريد ويلهلم لايبنيتز" و " ايزاك نيوتن " براي نخستين بار از وجود مفهوم جديدی به نام " بي نهايت كوچك " در عرصه رياضيات پرده برداشتند. بي نهايت كوچك كه عملا از همان مفهوم بي نهايت مشتق شده است، عددی مثبت است كه از هر عدد مثبت مفروض ديگری كوچكتر است. بدين ترتيب " بي نهايت " به همراه پسر عموی كوچك خود يعني بي نهايت كوچك، پايه های عرصه بديعی از رياضيات به نام " حساب ديفرانسيل و انتگرال " (حسابان) را شكل دادند و ابن گونه بود كه بي نهايت عملا به مهمترين مفهوم در علوم و مهندسی جديد تبديل شد.

اما در حالي كه دانشمندان و مهندسان به كاربردهای بي نهايت بسنده كرده بودند، تلاش براي كشف ديگر ويژگی های اين مفهوم اسرارآميز در عرصه رياضيات همچنان ادامه يافت. اين تلاش ها در سال ۱۸۷۴ ميلادی به نقطه عطفي رسيد، زيرا در اين سال بود كه " جورج كانتور " ،رياضی دان بزرگ روسی - آلمانی، به كشف حيرت انگيزي در مورد بي نهايت دست يافت: اين كه اگر چه بي نهايت، بي نهايت بزرگ است، اما با اين حال بزرگتر از آن هم وجود دارد! اين كشف، فوق العاده عجيب بود؛ چرا كه مي دانيم كه بي نهايت از هر عدد قابل تصوّری بزرگتر است. پس چگونه ممكن است چيزی بزرگتر از بي نهايت هم وجود داشته باشد؟ در پاسخ بايد گفت كه هر چيزی كه از بي نهايت بزرگتر باشد، اول از همه خودش بايد بي نهايت باشد. بنابراين در واقع كانتور كشف كرد كه بعضی بي نهايت ها از بعضی ديگر از

بي نهايت ها بزرگتر هستند! اما به راستي چگونه ؟ آخر اگر بي نهايت، بي نهايت بزرگ است ، پس چگونه ممكن است بزرگتر از آن هم وجود داشته باشد؟!

هنگامی که کانتور کشف عجیب و شگفت انگیز خود را براي سایر ریاضی دانان بازگو کرد،همگی تصور کردند که او دچار نوعی جنون شده است! به همين دليل هم هنوز چند سالي از اين كشف عجيب نگذشته بود كه كانتور دچار افسردگی



شدید شد. علت افسردگی شدید او کناره گیري از همکارانش و نااميد شدن از آنها و ساير رياضی دانان بود؛ چرا كه هرچه كشف مهم خود را براي آنها توضيح مي داد، هيچ كس متوجه آن نمي شد در واقع اين رياضی دانان نسل بعد بودند که نهایتا به اهمیت فوق العاده کشف کانتور پی بردند.

اما به راستی کانتور چگونه به چنين نتيجه حيرت انگيزي رسيده بود؟ پاسخ اين معما به شاخه ای از رياضيات باز مي گردد كه توسط خود كانتور بسط داده شده بود و امروزه " نظريه مجموعه ها " ناميده مي شود.

تحلیل ریاضی بینهایت

۱. مفاهیم بنیادی

دنباله عدد های صحیح مثبت ...,۱،۲،۳ نخستین و مهمترین نمونه از مجموعه های نا متناهی است. در اینکه این دنباله پایان یا انتها یا « نهایت»ی ندارد هیچ ابهامی وجود ندارد زیرا هر قدر عدد صحیح n بزرگ باشد، همواره می توان عدد صحیح بعدی ، $n + 1$ ، را تشکیل داد. اما در گذار از صفت « نا متناهی » یا « بینهایت » به اسم « بینهایت » نباید تصور کرد « بینهایت »، که معمولا با نماد ویژه ∞ نمایانده می شود، همچون یک عدد معمولی است. نمی توان نماد ∞ را در دستگاه اعداد حقیقی منظور کرد و در عین حال قواعد بنیادی حساب را محفوظ نگه داشت. با این حال، مفهوم بینهایت در همه جای ریاضیات حضور دارد زیرا اشیای ریاضی معمولا نه به صورت انفرادی و جداگانه بلکه به عنوان اعضای رده ها یا توده هایی که بینهایت شی ء همنوع دارند ، مانند مجموعه عدد های صحیح یا عدد های حقیقی یا مثلث ها در یک صفحه، مورد مطالعه قرار می گیرند. به این دلیل، تحلیل دقیق بینهایت ریاضی ضرورت دارد. نظریه نوین مجموعه ها که در اواخر قرن نوزدهم به وسیله جورج کانتور و پیروان مکتب او خلق شده، به این مسئله پرداخته و توفیق خیره کننده ای در حل آن بدست آورده است. نظریه کانتور در باب مجموعه ها در بسیاری از شاخه های ریاضی رخنه کرده و در آن ها به شدت تاثیر گذاشته، و در مطالعه مبانی منطقی و فلسفی ریاضیات اهمیتی اساسی یافته است. نقطه شروع این نظریه مفهوم مجموعه یا توده است. منظور از این کلمه، هر گردآیه ای از چیزهاست که با قاعده ای تعریف می شود که به دقت مشخص می کند کدام چیزها به گردآیه مفروض تعلق دارند. به عنوان مثال می توان از مجموعه همه اعداد های صحیح مثبت، مجموعه همه کسرهای اعشاری دوره ای، مجموعه همه عدد های حقیقی، یا مجموعه همه خط های راست در فضا سه بعدی، نام برد.

مفهوم اساسی در مقایسه « اندازه » دو مجموعه، مفهوم « هم ارزی » است. اگر عضو های دو مجموعهA و B را بتوان چنان با هم جفت کرد که به هر عضو A یک و فقط یک عضو B و به هر عضو B یک و فقط یک عضو A نظیر شود، این تناظر را دو سویی می نامند و می گویند A و B هم ارزند. مفهوم هم ارزی برای مجموعه های متناهی با مفهوم

معمولی برابری تعداد اعضا یکی است زیرا تعداد عضو های دو مجموعه متناهی یکی است اگر و تنها اگر بتوان تناظری بین آنها برقرار کرد. این موضوع در واقع همان ایده شمارش است زیرا وقتی مجموعه ای متناهی از چیز ها را می شماریم، صرفاً تناظری دو سویی بین آن چیزها و مجموعه ای از نمادهای عددی ۱،۲، ۳ ،... ، برقرار می سازیم.

برای اثبات هم ارزی دو مجموعه متناهی همیشه لازم نیست اشیای موجود در آنها را بشمریم. مثلاً می توانیم بدون شمارش ادعا کنیم که هر مجموعه متناهی از دایره های به شعاع ۱ با مجموعه مرکز های آنها هم ارز است.

اندیشه کانتور این بود که مفهوم هم ارزی به مجموعه های نا متناهی تعمیم یابد تا یک «حساب» بینهایت ها پدید آید. مجموعه همه عدد های حقیقی و مجموعه همه نقطه های روی یک خط راست، هم ارزند زیرا با انتخاب یک مبدأ و یک واحد می توان، به طور دو سویی، به هر نقطهٔ P از خط یک عدد حقیقی x به عنوان مختص آن نسبت داد:

$$P \longleftrightarrow x$$

عدد های صحیح زوج زیر مجموعهٔ سره ای از مجموعهٔ همهٔ عدد های صحیح، و عدد های صحیح زیر مجموعهٔ سره ای از مجموعهٔ همهٔ عدد های گویا تشکیل می دهند. (منظور از اصطلاح زیر مجموعهٔ سرهٔ یک مجموعهٔ S ، مجموعه ای چون S' است که مرکب از تعدادی از اعضای S ، نه همهٔ آنها است.) روشن است که اگر مجموعه ای متناهی باشد یعنی شامل n عضو، و نه بیشتر، باشد آنگاه نمی تواند هم ارز با هیچ یک از زیر مجموعه های سرهٔ خود باشد زیرا هر زیر مجموعهٔ سره حداکثر می تواند شامل ۱- n عضو باشد. ولی اگر مجموعه ای شامل بینهایت شیء باشد، می تواند هم ارز با زیر مجموعهٔ سره ای از خودش باشد، که موضوع غریب و نا متعارفی است. مثلاً با آرایش

۱   ۲   ۳   ۴   ۵ ... n ...
↕   ↕   ↕   ↕   ↕   ↕
۲   ۴   ۶   ۸   ۱۰ ... ۲n ...

تناظری دو سویی بین مجموعهٔ عدد های صحیح مثبت و مجموعهٔ عدد های صحیح زوج که زیر مجموعه ای از آن است برقرار می شود و از اینجا معلوم می شود که آن دو با یکدیگر هم ارزند. این امر که با اصل معروف « کل بزرگتر از جزء است » مغایرت دارد، نشان می دهد که در مبحث بینهایت باید در انتظار شگفتی هایی باشیم.

۲. شمارش پذیری عدد های گویا و شمارش ناپذیری پیوستار

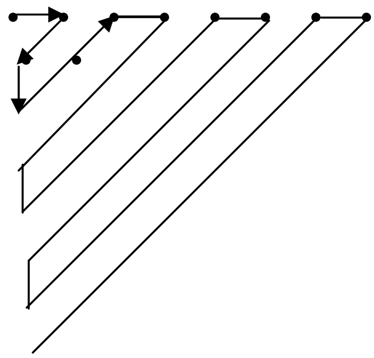
یکی از نخستین کشفیات کانتور در تحلیل بینهایت این بود که مجموعهٔ عددهای گویا(که مجموعهٔ نا متناهی عددهای صحیح، زیر مجموعه آن است و بنابراین خودش هم نا متناهی است) هم ارز با مجموعهٔ عددهای صحیح است. در نگاه اول، خیلی عجیب می نماید که مجموعهٔ چگال عددهای گویا همان وضعیتی را داشته باشد که مجموعهٔ عددهای صحیح، که خیلی تُنُک تر است، دارد. درست است که نمی توان عدد های گویای مثبت را به ترتیب اندازه مرتب کرد (کاری که با عدد های صحیح می توان کرد) یعنی نمی شود گفت که a اولین عدد گویا ست، b عدد بزرگتر بعدی است، و به همین ترتیب، زیرا بین هر دو عدد گویای مفروض بینهایت عدد دیگر وجود دارد و از این رو «عدد بزرگتر بعدی» وجود ندارد. اما همین طور که کانتور دریافت، با نادیده گرفتن رابطهٔ اندازه بین عنصرهای متوالی، می توان همهٔ عددهای گویا را در یک ردیف، r_1 ، r_2 ، r_3 ، r_4 ،... ، مانند

عددهای صحیح، مرتب کرد. در این دنباله، عدد گویای اول، دوم، سوم،و ... وجود دارد و هر عدد گویا دقیقاً یک بار ظاهر می شود. آراستن مجموعه ای از اشیا به صورت دنباله ای شبیه دنبالهٔ عددهای صحیح، شمارش آن مجموعه نامیده می شود. کانتور با ارائه چنین شمارشی نشان داد که مجموعه عددهای گویا هم ارز با مجموعهٔ عددهای صحیح است زیرا تناظر

۱	۲	۳	۴	...	n	...
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	
r_1	r_2	r_3	r_4	...	r_n	...

دو سویی است. اکنون یکی از شیوه های شمارش عددهای گویا را شرح می دهیم.
هر عدد گویا را می توان به صورت a/b نوشت که در آن a و b صحیح باشند،و همهٔ این عددها را می شود در آرایه ای قرار داد به این نحو که a/b در ستون aام و سطر bام آرایه باشد. مثلاً ۳/۴ در ستون سوم و سطر چهارم جدول زیر یافت می شود. حال می توان عددهای گویای مثبت را طبق طرح زیر مرتب کرد:
خط شکستهٔ پیوسته ای به این طریق می کشیم که از همه عددهای آرایه می گذرد: از ۱ شروع می کنیم و به طور افقی تا مکان بعدی در سمت راست ادامه می دهیم؛ به این ترتیب عدد ۲ به عنوان دومین عضو دنباله به دست می آید. سپس در امتداد قطری به سمت چپ می رویم تا به ستون اول و به مکانی که ۱/۲ در آن قرار دارد برسیم؛ آنگاه در امتداد قائم به سمت پایین به مکان بعدی، ۱/۳ ، و بعد در امتداد قطر به طرف بالا حرکت می کنیم تا دوباره به سطر اول، این بار به عدد ۳، برسیم؛ آنگاه به طور افقی به سمت ۴ می رویم؛ سپس در امتداد قطر پایین آمده به ۱/۴ می رسیم و به همین ترتیب، همان طور که در شکل دیده می شود، ترسیم خط را ادامه می دهیم. با حرکت روی این خط شکسته به دنبالهٔ ۱، ۲، ۱/۲ ، ۱/۳، ۲/۲، ۳، ۴، ۳/۲، ۲/۳، ۱/۴، ۱/۵، ۲/۴، ۳/۳، ۴/۲، ۵، ...
دست می یابیم که شامل عددهای گویا به ترتیبی است که در طول خط شکسته قرار گرفته اند. حال در این دنباله، همهٔ عددهای a/b ای را که در آنها a و b عامل مشترکی دارند حذف می کنیم ، بنابراین هر عدد گویای r دقیقاً یکبار و در ساده ترین صورت خود ظاهر خواهد شد.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	....
۱/۲	۲/۲	۳/۲	۴/۲	۵/۲	۶/۲	۷/۲	....
۱/۳	۲/۳	۳/۳	۴/۳	۵/۳	۶/۳	۷/۳	....
۱/۴	۲/۴	۳/۴	۴/۴	۵/۴	۶/۴	۷/۴	....
۱/۵	۲/۵	۳/۵	۴/۵	۵/۵	۶/۵	۷/۵	....
۱/۶	۲/۶	۳/۶	۴/۶	۵/۶	۶/۶	۷/۶	....



پس دنبالهٔ ... ،۵، ۱/۵، ۱/۴، ۲/۳، ۳/۲، ۴، ۳، ۱/۳، ۱،۲/۲، ۱ را به دست می آوریم که هر عدد گویای مثبت یک بار و فقط یک بار در آن ظاهر می شود. این نشان می دهد که مجموعهٔ همهٔ عددهای گویای مثبت، شمارش پذیر است. با توجه به این که عددهای گویا تناظری دو سویی با نقطه های گویای روی یک خط دارند، ما در عین حال ثابت کرده ایم که مجموعه نقاط گویای مثبت روی یک خط ، شمارش پذیر است.

حال که نشان داده ایم عددهای گویا شمارش پذیرند، ممکن است کسی گمان کند که هر مجموعه نا متناهی شمارش پذیر است و نتیجه نهایی تحلیل بینهایت همین است. ولی اصلاً چنین نیست. کانتور به این کشف بسیار مهم نائل شد که مجموعه همه عددهای حقیقی، شامل عددهای گویا و گنگ، شمارش پذیر نیست. به عبارت دیگر، مجموعه عددهای حقیقی نشان دهنده بینهایتی است که از بیخ و بن متفاوت با بینهایت عددهای صحیح یا عددهای گویا ست و به اصطلاح از نوع عالیتر یا از مرتبه بالاتری است. اثبات استادانه و غیر مستقیم کانتور از این موضوع به صورت الگویی برای بسیاری از اثبات های ریاضی درآمده است. رئوس اثبات به قرار زیر است. نخست با این فرض موقتی آغاز می کنیم که همهٔ عددهای حقیقی عملاً شمرده شده اند یعنی به صورتی که در آغاز این بحث گفتیم در دنباله ای قرار گرفته اند، و سپس عددی نشان می دهیم که در شمارش مفروض به حساب نیامده است. از اینجا تناقضی به دست می آید زیرا فرض کردیم همهٔ عددهای حقیقی در شمارش ملحوظ شده اند و حتی اگر یک عدد از قلم افتاده باشد این فرض غلط است. پس نشان داده می شود این فرض که شمارش عددهای حقیقی امکان پذیر است، پذیرفتنی نیست، و بنابراین خلاف آن درست است یعنی درستی حکم کانتور که می گوید مجموعهٔ عددهای حقیقی شمارش پذیر نیست، ثابت می شود.

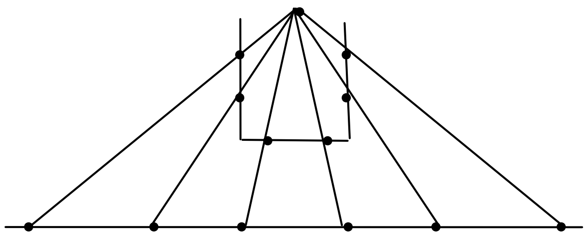
برای اجرای این برنامه،فرض می کنیم همهٔ عددهای حقیقی را شمارش کرده ایم به این معنی که آنها را به صورت جدولی از عدهای اعشاری نا متناهی مرتب کرده ایم:

عدد اول	$N_1 , a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ldots$
عدد دوم	$N_2 , b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ldots$
عدد سوم	$N_3 , c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ldots$
....	....

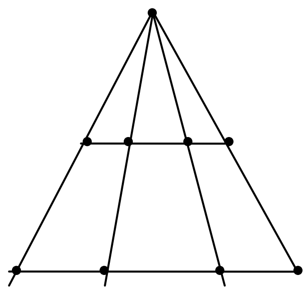
N ها نشان دهندهٔ قسمت صحیح اعداد و حروف کوچک نشان دهنده رقم های پس از ممیز است. فرض می کنیم این دنباله از کسرهای اعشاری شامل همهٔ عددهای حقیقی باشد. حال نکتهٔ اساسی اثبات این است که به وسیلهٔ « فرایند قطری »، عدد جدیدی بسازیم که بتوانیم نشان دهیم در این دنباله نیست.به این منظور،نخست رقم a ای انتخاب می کنیم که با a_1 متفاوت باشد و ۰ یا ۹ نیز نباشد(تا از ابهاماتی که ممکن است از برابریهایی نظیر ...۱,۰۰۰ = ۰,۹۹۹ ناشی شود، اجتناب کرده باشیم)، سپس رقم b ای که متفاوت با b_2 باشد و این هم مخالف ۰ و ۹ باشد، و همین نحو، c ای که متفاوت با c_3 باشد، و الی آخر. (مثلاً می توانیم خیلی ساده فرض کنیم $a = 1$ مگر اینکه $a_1 = 1$، که در این صورت $a = 2$ را انتخاب می کنیم و به همین نحو به ازای همهٔ رقم های b، c، d، e، ... عمل کرده به طرف پایین جدول پیش می رویم). حال ، کسر اعشاری نا متناهی $z = 0.abcde\ldots$ را در نظر بگیرید.این عدد تازهٔ Z مسلماً با هریک از اعداد جدول بالا متفاوت است؛ این عدد نمی تواند برابر با عدد اولی جدول باشد زیرا در رقم اول پس از ممیز با آن اختلاف دارد؛ نمی تواند برابر با دومی باشد زیرا در رقم دوم پس از ممیز با آن تفاوت دارد؛ و به طور کلی، نمی تواند با عدد n ام جدول یکی باشد زیرا رقم n ام با آن تفاوت دارد. از اینجا معلوم می شود جدول ما، که عددهای اعشاری در آن به طور متوالی مرتب شده اند، شامل همهٔ عددهای حقیقی نیست. پس این مجموعه شمارش پذیر نیست.

شاید خواننده تصور کند دلیل شمارش ناپذیری پیوستار اعداد این است که خط راست تا بینهایت ادامه میابد، و پارهٔ محدودی از خط فقط شامل مجموعهٔ نا متناهی شمارش پذیری از نقاط است. این تصور درست نیست، زیرا به آسانی می توان نشان داد که کل پیوستار اعداد با هر پارهٔ محدودی از آن هم ارز است، مثلاً با پاره خط از ۰ تا ۱ بدون نقاط انتهایی آن. برای بدست آوردن تناظر مطلوب می توان، مانند شکل زیر پاره خط را در نقاط ۱/۳ و ۲/۳ خم

کرد و با انتخاب نقطه ای به عنوان مرکز، تصور خط شکسته حاصل را به دست آورد. نتیجه می گیریم که حتی یک پاره محدود از محور اعداد، شامل تعداد نا متناهی شمارش ناپذیر از نقاط است.



الف)تناظر دو سویی بین نقاط پاره خطی خمیده و یک خط راست کامل



ب) تناظر یک به یک بین نقاط دو پاره خط با طول متفاوت

ارائه اثباتی دیگر، و شاید شهودیتر، از شمارش ناپذیری پیوستار اعداد مفید خواهد بود. با توجه به آنچه هم اکنون ثابت کردیم، کافی است توجه خود را به مجموعهٔ نقاط بین ۰ و ۱ محدود می کنیم. باز هم اثبات به صورت غیر مستقیم است. فرض کنید که بتوان مجموعهٔ همهٔ نقاط روی خط بین ۰ و ۱ را به صورت دنباله ای مرتب کرد:

$$a_1 \ , a_2 \ , a_3 \ , \ldots \qquad (۱)$$

نقطهٔ به مختص a_1 را در بازه ای به طول ۱/۱۰ قرار می دهیم، نقطهٔ به مختص a_2 را در بازه ای به طول $۱/۱۰^{۲}$ قرار می دهیم، و به همین ترتیب. اگر همهٔ نقطه های بین ۰ و ۱ در دنباله (۱) جای بگیرند، بازهٔ واحد را دنباله ای نا متناهی از زیر بازه های ۱/۱۰ ، $۱/۱۰^{۲}$ ، ... که می توانند با هم اشتراک داشته باشند می پوشاند.(اینکه بعضی از این بازه ها در خارج از بازهٔ واحد ادامه یابند تأثیری در اثبات ما ندارد.) مجموع این طول ها از سری هندسی زیر به دست می آید.

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right] = \frac{1}{9}$$

پس این فرض که دنبالهٔ (۱) شامل همهٔ عددهای حقیقی از ۰ و ۱ باشد منجر به این می شود که تمام بازه ای به طول ۱ را مجموعه ای از بازه ها که طول کل آنها ۱/۹ است بپوشاند، و این امر از نظر شهودی نامعقول است. می توانیم این تناقض را به عنوان اثبات بپذیریم، هر چند از دیدگاه منطقی به تحلیل مفصل تری نیاز است.

با استدلالی که در پاراگراف بالا آمد، می توان قضیهٔ بسیار مهمی را در نظریهٔ جدید«اندازه» ثابت کرد.اگر به جای بازه های مورد بحث در بالا بازه های کوچکتری به طول $\frac{\varepsilon}{10^n}$ در نظر بگیریم که ε عدد مثبت کوچک دلخواهی باشد، می بینیم که هر مجموعهٔ شمارش پذیر از نقاط روی خط را می توان در مجموعه ای از بازه ها که طول کل آنها $\frac{\varepsilon}{9}$ باشد گنجاند. چون ε دلخواه بود، عدد اخیر را می توان به قدر دلخواه کوچک کرد. در اصطلاح نظریهٔ اندازه می گوییم هر مجموعهٔ شمارش پذیر از نقاط ، اندازهٔ صفر دارد.

۳. « عددهای اصلی » کانتور

ماحصل نتایج و احکامی که تاکنون ذکر کرده ایم این است که اگر مجموعهٔ متناهی A شامل اعضایی بیشتر از مجموعهٔ متناهی B باشد، آنگاه تعداد عضو های A نمی تواند با تعداد عضو های B برابر باشد. اگر به جای مفهوم « مجموعه هایی که تعداد (متناهی) عضو هایشان یکی است » مفهوم کلیتر مجموعه های هم ارز را قرار دهیم، آنگاه حکم قبلی در مورد مجموعه های نامتناهی برقرار نیست؛ مجموعهٔ همه اعداد صحیح نسبت به مجموعهٔ عددهای صحیح زوج ، اعضای بیشتری دارد، و مجموعهٔ عددهای گویا نیز بیش از مجموعهٔ عدد های صحیح عضو دارد، ولی دیدم که این مجموعه ها هم ارزند. ممکن است کسی گمان کند که همهٔ مجموعه های نامتناهی هم ارزند و بین بینهایت و عددهای متناهی تمایزی به جز این وجود ندارد [که بینهایت، یکی است حال آنکه عددهای متناهی متکثرند]، ولی نتیجه ای که کانتور به دست آورد این گمان را باطل می کند؛ مجموعه ای وجود دارد، یعنی پیوستار اعداد حقیقی، که هم ارز با هیچ مجموعهٔ شمارش پذیری نیست.

پس دست کم دو نوع «بینهایت» داریم، بینهایت شمارش پذیر عددهای صحیح و بینهایت شمارش ناپذیر پیوستار. اگر دو مجموعهٔ A و B متناهی باشند، عدد اصلی هر یک از آنها عددی طبیعی است و این عبارت به مفهوم معمولی برابری تعداد اعضاست؛ پس عبارت مزبور تعمیم معتبری از این مفهوم است. به علاوه، اگر مجموعه ای چون A هم ارز با زیر مجموعه ای از B باشد ولی B هم ارز با A یا هیچ یک از زیر مجموعه هایش نباشد، به پیروی از کانتور می گوییم که مجموعهٔ B عدد اصلی بزرگتری از مجموعهٔ A دارد. در اینجا هم اگر با مجموعه های متناهی سروکار داشته باشیم، این «بزرگتر بودن » به معنای معمول در مقایسهٔ اعداد طبیعی است. مجموعهٔ عددهای صحیح، زیر مجموعه ای از مجموعهٔ عددهای حقیقی است در حالی که مجموعهٔ عددهای حقیقی نه با مجموعهٔ عددهای صحیح هم ارز است و نه با هیچ زیر مجموعهای از آن (یعنی مجموعهٔ عددهای حقیقی نه شمارش پذیر است و نه متناهی). پس، طبق تعریف ما، پیوستار اعداد حقیقی، عدد اصلی بزرگتری از مجموعهٔ عددهای صحیح دارد.

* در واقع، کانتور نحوهٔ ساختن دنبالهٔ کاملی از مجموعه های نامتناهی را که عددهای اصلی آنها مرتباً بزرگتر و بزرگتر می شوند نشان داد. چون می توانیم با مجموعهٔ عددهای صحیح مثبت شروع کنیم، به وضوح کافی است که نشان دهیم به ازای هر مجموعهٔ مفروض A می توان مجموعهٔ دیگری چون B با عدد اصلی بزرگتر ساخت. به دلیل کلیت زیاد این قضیه، اثبات آن لزوماً تا حدی انتزاعی است. مجموعهٔ B را مجموعه ای تعریف می کنیم که عضو هایش همهٔ زیر مجموعه های متفاوت مجموعهٔ A هستند. منظور از کلمه « زیر مجموعه » نه تنها زیر مجموعه های سرهٔ A بلکه همچنین خود A و « زیر مجموعهٔ » تهی Ø است که هیچ عضوی ندارد.(مثلاً، اگر A مرکب از سه عدد صحیح ۱، ۲، ۳ باشد، آنگاه B شامل ۸ عضو متفاوت است: ({۳، ۲، ۱} ، {۲ ،۱} ، {۳، ۱} ، {۳، ۲} ، {۱} ، {۲} ،{۳} ، Ø) هر عضو مجموعهٔ B خودش مجموعه ای مرکب از بعضی از اعضای A است. حال فرض کنید که B هم ارز A یا زیر مجموعه ای از آن است، یعنی قاعده ای وجود دارد که، به شیوه ای دوسویی ، عضو های A یا زیر مجموعه ای از A را به همهٔ عضو های B ، یعنی زیر مجموعه های A ، مربوط می سازد:

$$a \longleftrightarrow S_a \qquad (۲)$$

S_a نشان دهندهٔ زیر مجموعه ای از A است که متناظر با عضو a از A است. اگر در مورد عضوی از B (یعنی زیر مجموعه ای چون T از A) نشان دهیم که هیچ عضوی چون a را نمی توان به آن مربوط کرد ، به تناقض رسیده ایم. برای ساختن این زیر مجموعه، توجه می کنیم که به ازای هر عنصر x از A دو امکان وجود دارد : یا مجموعهٔ S_x که در تناظر مفروض (۲) به x منسوب می شود شامل عضو x هست ، و یا S_x شامل x نیست ، این زیر مجموعه با هر S_a دست کم در عنصر a اختلاف دارد زیرا اگر S_a شامل a باشد، T شامل آن نیست، حال آنکه اگر S_a شامل a نباشد، T هست. پس T مشمول در تناظر (۲) نیست. از اینجا معلوم می شود که نمی توان تناظری دو سویی بین عضو های A یا زیر مجموعه ای از A و عضو های B برقرار کرد. ولی رابطهٔ وابستگی

$$a \longleftrightarrow \{a\}$$

معرف تناظری دو سویی بین عضو های A و زیر مجموعه ای از B است که مرکب از همهٔ زیرمجموعه های تک عضوی A باشد. پس بنا به تعریف پاراگراف قبل، B عدد اصلی بزرگتری از عدد اصلی A دارد.

ممکن است تصور شود که یافتن مجموعه ای از نقطه ها که عدد اصلیش بزرگتر از مجموعهٔ اعداد حقیقی از ۰ تا ۱ باشد، کار آسانی است. مسلماً مربع که « دو بعدی » است به نظر می رسد نقاط بیشتری از پاره خط داشته باشد که « یک بعدی » است. ولی شگفت آور است که چنین نیست؛ عدد اصلی مجموعهٔ نقطه های مربع با عدد اصلی مجموعهٔ نقطه های روی پاره خط یکی است. برای اثبات این موضوع، تناظر زیر را برقرار می سازیم.

اگر (x , y) نقطه ای از مربع واحد باشد، x و y را می توان به صورت اعشاری زیر نوشت

$$x = 0.a_1\, a_2\, a_3\, a_4$$
$$y = 0.\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4$$

که در آن برای اجتناب از ابهام ، مثلاً برای عدد گویای $\frac{1}{4}$، ....۰٫۲۵۰۰۰۰ را به جای ... ۰٫۲۴۹۹۹۹ اختیار می کنیم. سپس به نقطهٔ (x , y) از مربع ، نقطهٔ

$$z = 0.a_1\, b_1\, a_2\, b_2\, a_3\, b_3\, a_4\, b_4 \ldots$$

از پاره خط از ۰ تا ۱ را تخصیص می دهیم. روشن است که نقاط متفاوت (x , y) و (x', y') از مربع ، متناظر با نقاط متفاوت z و z' از پاره خط اند ؛ بنابراین، عدد اصلی مربع از عدد اصلی پاره خط بیشتر نیست.

(واقعیت این است که تناظری که هم اکنون تعریف شد، تناظری دو سویی بین مجموعهٔ همهٔ نقطه های مربع و زیر مجموعهٔ سره ای از پاره خط واحد است؛ مثلاً هیچ نقطه مربع نمی تواند متناظر با نقطهٔ ... ۰٫۲۱۴۰۹۰۹۰۹۰ باشد زیرا برای عدد $\frac{1}{4}$ ، صورت ... ۰٫۲۵۰۰۰ به جای ... ۰٫۲۴۹۹۹ اختیار شد. ولی می توان تناظر را کمی اصلاح کرد تا تناظری دو سویی بین همهٔ مربع و همهٔ پاره خط باشد ، که به این ترتیب دیده می شود عدد اصلیشان یکی است.)

با استدلال مشابهی معلوم می شود که عدد اصلی نقطه های موجود در یک مکعب بزرگتر از عدد اصلی پاره خط نیست.

هر چند به نظر می رسد که این نتایج با مفهوم شهودی تعداد ابعاد متناقض باشد، باید به یادآوریم تناظری که تعریف کرده ایم « پیوسته » نیست؛ اگر روی پاره خط با حرکت پیوسته از ۰ به ۱ برویم ، نقاط متناظر در مربع، خم پیوسته ای تشکیل نخواهند داد بلکه به صورت کاملاً بی نظم ظاهر خواهند شد، بعد مجموعه ای از نقاط فقط به عدد اصلی مجموعه بستگی ندارد بلکه به نحوه توزیع نقاط در فضا هم وابسته است.

۴. پارادکس های بینهایت

اگر چه بیشتر ریاضیدانان موضع آشتی ناپذیر شهودگرایان را بسیار افراطی می دانند، اما وقتی پارادکسهای منطقی آشکاری در نظریهٔ مجموعه های نامتناهی پیدا شد، این نظریه زیبا در معرض تهدید جدی قرار گرفت. اندکی بعد از ابداع نظریه معلوم شد که آزادی کامل در استفاده از مفهوم « مجموعه » به تناقض می انجامد: یکی از این تناقض ها، که برتراند راسل آن را ارئه کرد، به صورت زیر بیان می شود. در بیشتر مجموعه ها خود مجموعه عضو مجموعه نیست. مثلاً،اعضای مجموعهٔ A مرکب از همهٔ عددهای صحیح ، عددهای صحیح اند؛ A که خودش یک عدد صحیح نیست بلکه مجموعهٔ عددهای صحیح است، عضو خودش نیست. چنین مجموعه ای را می توانیم « عادی » بنامیم. اما شاید مجموعه هایی هم باشند که عضو خودشان باشند؛ مثلاً مجموعهٔ S را که به صورت زیر تعریف می شود، می توان مجموعه ای در نظر گرفت که عضو خودش هست: « اعضای S همهٔ مجموعه هایی هستند که با یک عبارت فارسی که کمتر از بیست و پنج کلمه داشته باشد قابل تعریف اند.» چنین مجموعه هایی را می توان مجموعه های «غیرعادی» نامید. ولی در هر حال، بیشتر مجموعه ها عادی هستند و می توانیم ویژگی نامتعارف مجموعه های « غیرعادی » را با محدود کردن توجه خود به مجموعهٔ همهٔ مجموعه های عادی نادیده بگیریم. این مجموعه را C می نامیم. هر عضو مجموعهٔ C خودش یک مجموعه است، در واقع یک مجموعهٔ عادی. حال این سوال پیش می آید : C خودش یک مجموعه عادی است یا غیر عادی؟ پاسخ باید یکی از این دو حالت باشد. اگر C عادی باشد، عضو خودش هست ، زیرا C به عنوان مجموعه ای شامل همهٔ مجموعه های عادی تعریف شده است. اگر چنین باشد، C غیر عادی است زیرا مجموعه های غیر عادی آنهایی هستند که خودشان را به عنوان عضو دربردارند. این تناقض است. پس C باید غیر عادی باشد. اما در این صورت یک مجموعهٔ غیر عادی عضو C است (یعنی خود C)، که با تعریفی که طبق آن C فقط شامل مجموعه های عادی بود متناقض است. پس در هر حال می بینیم فرض وجود مجموعهٔ C به تناقض انجامیده است.

۵. مبانی ریاضیات

این گونه تناقض ها راسل و دیگران را به بررسی اصولی و روشمند مبانی ریاضیات واداشت . هدف نهایی کوشش های آنان فراهم کردن مبنایی منطقی برای استدلال ریاضی بود که بتوان نشان داد عاری از تناقض است، و در عین حال همهٔ چیزهایی را که از لحاظ همه (یا بعضی از) ریاضیدانان مهم است، در بر دارد . اگر چه این هدف بلند پروازانه حاصل نشده است و شاید هم هیچ گاه قابل حصول نباشد، موضوع منطقی ریاضی توجه عدهٔ روز افزونی از دانشجویان را به خود جلب کرده است. بسیاری از مسأله های این مبحث که به زبان بسیار ساده قابل بیان هستند، اثباتشان دشوار است . به عنوان مثال ، فرض پیوستار را ذکر می کنیم که می گوید هیچ مجموعه ای وجود ندارد که عدد اصلیش بزرگتر از عدد اصلی مجموعهٔ عددهای صحیح ولی کوچکتر از عدد اصلی مجموعهٔ عددهای حقیقی باشد. نتیجه های جالب

زیادی از این فرض می توان گرفت ، ولی این حدس تاکنون نه اثبات شده است نه ابطال، هر چند کورت گودل اخیراً نشان داده است که اگر اصول موضوع معمولی نظریه مجموعه ها سازگار باشند، آنگاه مجموعه ای از اصل موضوع نیز که با افزودن فرض پیوستار به آنها به دست می آید ، سازگار است . این گونه پرسشها در نهایت به این پرسش تحویل می یاند که وجود ریاضی اشیاء به چه معناست. خوشبختانه وجود علم ریاضیات به این بستگی ندارد که پاسخ رضایت بخشی برای این پرسش داشته باشیم . مکتب « صورتگرایی » به رهبری هیلبرت ریاضیدان بزرگ، بر آن است که « وجود » در ریاضیات فقط به معنی « عاری بودن از تناقض » است. پس لازم می آید مجموعه ای از اصول موضوع بسازیم که بتوان همهٔ ریاضیات را با استدلال صوری صرف از آن نتیجه گرفت ، و نشان داد که این مجموعهٔ اصول موضوع هرگز به تناقض نمی انجامد . نتایجی که گودل و دیگران در سالهای اخیر به دست آورده اند ، ظاهراً نشان می دهد که این برنامه ، دست کم به آن صورتی که هیلبرت تصور می کرد ، قابل اجرا نیست. نکته مهم این است که نظریهٔ هیلبرت درباره ساختار صوری شدهٔ ریاضیات اساساً مبتنی بر شیوهٔ شهودی است . شهود سازنده به این یا آن طریق ، آشکار یا پنهان ، حتی در آشتی ناپذیرترین دیدگاه صورتگرایانه، منطقی، یا اصل موضوعی ، همچنان رکن حیاتی در ریاضیات است .

هتل هیلبرت

دیوید هیلبرت :

وی یکی از ریاضیدانان بزرگ جهان در نیمه اول قرن بیستم می باشد وآلمانی است. در کونیگسبرگ متولد شد ودرسال ۱۸۸٤ از دانشگاه این شهر درجه دکتری گرفت وقریب ۱۰ سال را به تدریس در آن دانشگاه گذراند. سپس در ۱۸۹٥ به استادی دانشگاه گوتینگن رسید وتا آخرعمر در این شهر زیست.

تلاشها و دستاوردها

هیلبرت یکی از موسسان ریاضیات قرن بیستم و در بسیاری جهات ، بوجود آورنده مکتب صورتگرایی ریاضیات است که در ریاضیات محض این قرن نفوذ زیادی داشته است. یکی از دستاوردهای اساسی او در صورتگرایی،مبناهای هندسی (foundations of geometry) اوست، که برخلاف مبانی آکسیوماتیکی نسبتا شهودیتر اقلیدس،در بنا کردن هندسه بر مبنای آکسیوماتیکی محض مطرح شده است .

کارهای ریاضی اوبسیار عمیق ومتنوع است. واز جمله می توان تئوری پایاها، تئوری میدانهای جبری وتحقیق در مبانی هندسه و تحقیق در مبانی ریاضیات و معادلات انتگرالی و فیزیکی را ذکر کرد .

او سهم عظیمی در آنالیز ریاضی داشت .فضاهای برداری بی نهایت بعدی ابداعی او که به فضاهای هیلبرت مشهورند راه را برای بنیانگذاری آنالیز تابعی گشود .

در سال ۱۹۰۰ در کنگره بین المللی ریاضیات ، قرن تازه ای را با مطرح کردن فهرست مشهور ۲۳ مسئله ای خود، افتتاح کرد.مسائلی که از آن زمان تاکنون ریاضیدانان را به خود مشغول کرده ، مبلغ عظیمی از آثار مهم هشتاد سال گذشته را بوجود آورده اند .

بنا به دلایل فوق،هیلبرت اغلب به عنوان ریاضیدانی مطلقا محض شناخته میشود،اما وی رئیس سمینار فیزیک اتمی مشهور گوتینگن نیز بود، که تاثیر عظیمی بر توسعه نظریه کوانتوم داشت .

دیوید هیلبرت (متولد ۲۳ ژانویه ۱۸۶۲ در کونیگسبرگ ، پروس شرقی ؛ درگذشت ۱۴ فوریه ۱۹۴۳ در گوتینگن، آلمان)، ریاضیدان آلمانی و یکی از مشهورترین ریاضیدانهای قرن نوزدهم و همچنین، اوایل قرن بیستم. او یکی از پرتاثیرترین ریاضی‌دانان در گسترش و پیدایش مکانیک کوانتومی و حتی نظریه نسبیت می‌باشد. از کارهای دیگر او، بنیان‌ریزی هتل‌داری آقای هیلبرت است.

هتل هیلبرت

سکانس اول: آقای هیلبرت صاحب تنها هتل یک شهر توریستی عجیب بود! شهری که همه چیز آن غیرعادی بود؛ درست مثل هتل خود آقای هیلبرت. هتل آقای هیلبرت، هتلی بود که به اندازه‌ی تمام اعداد طبیعی اتاق داشت. یعنی به ازای هر عدد طبیعی n ، اتاقی با شماره‌ی n در

این هتل وجود داشت .
در میانه‌های تابستان وقتی که تعداد زیادی از مردم برای بازدید از جاذبه‌های توریستی این شهر، به آنجا آمده بودند هتل آقای هیلبرت کاملاً پر شد، به طوری که در همه‌ی اتاق‌های آن دست کم یک مسافر ساکن شده بود. ظاهراً همه چیز بر وفق مراد آقای هیلبرت پیش می‌رفت؛ مشتریان زیاد و درآمدی قابل توجه، اما این همه‌ی ماجرا نبود و پر بودن هتل دردسرهایی باخود داشت:
درست در شرایطی که تمام اتاق‌های هتل پر شده بودند یکی از بازرسان اتحادیه هتل‌داران برای بازرسی از شرایط و امکانات هتل آقای هیلبرت به این شهر رفت! معمول این بود که بازرسان چند روزی در هر هتل اقامت می‌کردند و در این چند روز با سرکشی به تک تک امکانات هتل، گزارش خود را تنظیم می‌کردند. از این رو همهٔ هتلداران معمولاً یک اتاق را برای آمدن بازرسان احتمالی خالی نگه می‌داشتند، اما در اثر سهل انگاری مسئول پذیرش هتل آقای هیلبرت، آن اتاقی که همیشه به همین منظور خالی نگه داشته می‌شد هم به مسافران اجاره داده شده و حتی یک اتاق هم خالی نبود!
آقای هیلبرت و کارکنان هتل مانده بودند که چه کنند، ازیک سوی می‌بایست هر طور که شده اتاقی برای اقامت آقای بازرس فراهم کنند، چرا که در غیر این‌صورت ممکن بود که وی گزارشی بر علیه آن‌ها تنظیم کند و از ستاره‌های هتلشان کم شود، و از سوی دیگر همهٔ اتاق‌ها پر بود و نمی‌توانستند عذر هیچ یک از مسافران را بخواهند؛ چون ممکن بود مسافر اخراج شده شکایتی علیه آن‌ها بنویسد و بر اساس این شکایت اتحادیهٔ هتل‌داران یکی از ستاره‌های هتل آقای هیلبرت را بگیرد. همه مستأصل مانده بودند : آیا راهی وجود دارد که بدون اخراج هیچ مسافری و حداکثر با جابه‌جائی مسافران یک اتاق خالی برای آقای بازرس پیدا کرد؟
خوشبختانه : بله! می‌توان با جابجائی مسافران و بدون اخراج هیچ یک از آن‌ها اتاقی برای آقای بازرس خالی کرد! با کمی دقت می‌بینیم که می‌توان همه‌ی مسافران را یک اتاق به جلو فرستاد و به این ترتیب اتاق شماره‌ی ۱ برای آقای بازرس خالی می‌شود!
به نظر شما عجیب نیست؟ از داخل یک هتل کاملاً پر، یک اتاق خالی بیرون می‌آید، بدون این‌که حتی یک نفر از هتل خارج شده باشد !!
سکانس دوم : تمایل زیاد مردم برای مسافرت به یک شهر توریستی هر سرمایه‌داری را وسوسه می‌کند که با راه‌اندازی یک هتل مجلل درآمد کلانی به جیب بزند. این‌همان وسوسه‌ای بود که در دل پسر عموی آقای هیلبرت افتاد و او را پس از مدتی صاحب دومین هتل این شهر عجیب کرد؛ هتلی که درست مثل هتل آقای هیلبرت به اندازه‌ی تمام اعداد طبیعی اتاق داشت.
کار و بار هردوی آن‌ها به خوبی پیش می‌رفت و در روزهای تابستان بعد، هر دو هتل کاملاً پر از مشتری بود، بدون حتی یک اتاق خالی؛ اما بازهم این همه‌ی ماجرا نبود و همه چیز آن‌طور که توقع می‌رفت خوب نبود؛ علی الخصوص برای آقای هیلبرت !
هتل آقای هیلبرت در مقایسه با هتل پسر عمویش بسیار قدیمی بود، هر روز قسمتی از هتل احتیاج به تعمیر داشت، یک روز لوله‌های اتاق‌ها می‌ترکید و دیوارها مرطوب می‌شد، یک روز شیرهای آب خراب بود، یک روز در اثر پوسیدگی، سیم‌های تلفن قطع می‌شد و هزار مشکل کوچک و بزرگ دیگر که هر روز گریبان آقای هیلبرت و هتل کهنه‌اش را می‌گرفت!
کم‌کم سر و صدای مسافران هتل هم بلند شده بود. در چند قدمی آن‌ها هتل زیبا و جدیدالتأسیس پسرعموی آقای هیلبرت بود و آن‌ها با دیدن هتل وی هر روز بیش‌تر افسوس می‌خوردند که چرا در هتل آقای هیلبرت اقامت کرده‌اند و در عوض این افسوس آقای هیلبرت را شماتت می‌کردند. آقای هیلبرت بیچاره واقعاً کلافه شده بود، از این رو خوب فکر کرد تا بتواند راهی برای خلاصی از این شرایط پیدا کند :
او تصمیم گرفت که همه‌ی مسافران هتلش را برای مدتی به هتل پسر عمویش بفرستد و در این مدت دست به کارتعمیراتی اساسی برای بازسازی هتل خود شود! اما چگونه ؟ چگونه این

کار ممکن بود در حالی که هم هتل آقای هیلبرت کاملاً پر بود و هم هتل پسر عموی آقای هیلبرت ؟؟

آقای هیلبرت مرد باهوشی بود. این مشکل را بایک راه حل هوشمندانه از پیش رو برداشت تا بدون اخراج حتی یک مسافر و تنها با جابجائی آن‌ها ، همه‌ی مسافران این دو هتل در کنار هم در اتاق‌های هتل پسر عموی آقای هیلبرت اقامت کنند.

اما راه حل او: آقای هیلبرت از پسر عمویش خواست تا مسافران هتل خود را به اتاق‌های زوج منتقل کند. به این ترتیب که با مسافر اتاق شماره‌ی n تماس بگیرد و از او بخواهد که به اتاق 2n نقل مکان کند. به این ترتیب همه‌ی مسافران هتل پسر عموی آقای هیلبرت به اتاق‌های زوج منتقل شده و همهٔ اتاق‌های فرد خالی شدند؛ و در نهایت آقای هیلبرت با مسافر اتاق شماره‌ی m خود تماس گرفت و از او خواست تا به اتاق شماره‌ی 2m-1 هتل پسر عموی آقای هیلبرت برود! بدین ترتیب همه‌ی مسافران هر دو هتل توانستند در اتاق‌های هتل پسر عموی آقای هیلبرت ساکن شوند (ساکنان اولیه‌ی هتل پسرعموی آقای هیلبرت در اتاق‌های زوج و ساکنان اولیه‌ی هتل آقاس هیلبرت در خانه‌های فرد)

سکانس سوم : پس از مدت کوتاهی آقای هیلبرت هتل خود را بازسازی کرد و مسافران وی دوباره به هتل خود او بازگشتند. چند سالی گذشت و در این سال‌ها پسرعموها در کنار هم و از قبل جاذبه‌های توریستی این شهر پول پارو می‌کردند. هتل‌هایشان تقریباً همیشه پر بود و همه چیز بر وفق مراد! تا این‌که بعد از مدتی آن‌ها تصمیم گرفتند که با مشارکت یکدیگر هتل‌هایشان را تخریب کنند و به جای آن دو هتل یک هتل شراکتی بسیار بسیار مجلل بسازند. نقشه‌ی آن‌ها عملی شد و پس از مدتی اندک آن‌ها صاحب یک هتل بسیار زیبا و مدرن شدند. هتلی که به اندازه‌ی آن دو هتل اولی عجیب بود و صد البته پر دردسر! هتلی که درست به اندازه‌ی تمام اعداد طبیعی در بالای طبقه‌ی هم‌کف خود طبقه داشت و در هر طبقه هم درست به اندازه‌ی تمام اعداد طبیعی، اتاق !!

کسب و کار پسر عموها در این هتل هم پر رونق بود. تقریباً همه‌ی طبقات همیشه پر بودند، البته به جز طبقه‌ی هم‌کف که آن‌ها برای جلوگیری از وقوع برخی مشکلاتی که قبلاً با آن‌ها برخورد کرده بودند خالی نگهش می‌داشتند ؛ که البته این عاقبت اندیشی آن‌ها بالاخره به کمکشان آمد :

در یکی از روزهائی که همه‌ی اتاق‌های طبقات بالای هم‌کف پر بودند (و تنها هم‌کف خالی بود؛ آن هم کاملاً)، هتل پسرعموها گرفتار حریق شد. شعله‌ها از همه‌جای هتل زبانه می‌کشیدند، مسافران با فریاد به سمت پله های اضطراری فرار می‌کردند و... خلاصه شرایطی پیش آمده بود، به شدت دل‌خراش ! آقای هیلبرت و پسر عموی آقای هیلبرت فوراً دست به کار شدند و بلافاصله آتش نشانی و نیروهای امداد را خبر کردند. با تلاش‌های آتش نشانان و امدادگران خوشبختانه آتش خیلی سریع خاموش شد و آسیب جانی به کسی نرسید، اما همهٔ طبقات هتل به جز طبقه‌ی هم‌کف در آتش سوخته بودند و غیر قابل سکونت بودند؛ و حالا این خود غصه‌ای شده بود برای پسرعموها! این‌همه مسافر را چه کنند؟ آیا می‌توان همهٔ آن‌ها را در طبقه‌ی همکف جا داد؟؟

آقای هیلبرت قدری فکر کرد و بعد از مدتی راه حلی را با پسر عمویش در میان گذاشت! پیاده کردن راه حل آقای هیلبرت همه‌ی مسافران همه‌ی طبقات بالائی را در طبقه‌ی هم‌کف جا داد! آیا می‌توانید حدس بزنید که راه حل وی چه بود؟

مفاهيم بي نهايت:

بی نهایت مفهومی است که در رشته‌های مختلف ریاضیات (با تعبیرات مختلف) به‌کار می‌رود و معمولاً به معنای «فراتر از هر مقدار» است. بی نهایت از واژه لاتین *finites* به معنی محدود گرفته شده (علامت ∞) چیزی است که "محدود " نیست، که در آن هیچ محدودیت فضایی و زمانی وجود ندارد.
در آنالیز حقیقی بی نهایت به معنای حدی بیکران است. $x \to \infty$ یعنی متغیر x فراتر از هر مقدار در نظر گرفته شده رشد می‌کند.
در آنالیز مختلط نیز همین علامت با همین نام به‌کار می‌رود. در این رشته $x \to \infty$ یعنی قدر متغیر مختلط x (که آن را با $|x|$ نشان می‌دهند) بیش از هر مقدار در نظر گرفته شده رشد می‌کند.
در نظریه مجموعه‌ها مفهوم بی نهایت با اعداد ترتیبی و اعداد اصلی مربوط است. عدد اصلی مجموعه اعداد طبیعی را با $\aleph_0$ نمایش می‌دهند و می‌خوانند « الف صفر» (از اولین حرف الفبای عبری به‌نام «الف»). این عدد « تعداد» عددهای مجموعه اعداد طبیعی را نشان می‌دهد، که « بی نهایت » است . جالب است که بدانید که عدد اصلی مجموعه‌های N و Z و Q یکسان هستند ولی عدد اصلی مجموعه R برابر عددی است که آن را الف می‌خوانند. خوب است بدانید که الف برابر دو به توان الف صفر می‌باشد. بی نهایت دارای دو مفهوم فیزیکی و ریاضی است که کاملاً با یکدیگر متفاوتند.
مفهوم فیزیکی بی نهایت، دارای تعریف دقیقی نیست و در جای‌های مختلف دارای تعاریف متفاوت است. به عنوان مثال، می‌گوییم که اگر جسم در کانون عدسی محدب قرار گیرد، تصویر در بی نهایت تشکیل می‌شود. حال دو عدسی با فواصل کانونی متفاوت در نظر بگیرید و اجسامی را روی کانون این دو عدسی قرار دهید . طبق قاعده ، تصاویر هر دو در بی نهایت تشکیل می‌شود. اما قطعا تصویر این دو دقیقا در یک نقطه تشکیل نمی‌شود؛ یعنی بی نهایت برای این دو عدسی متفاوت است.
به عنوان مثالی دیگر، دو منبع گرمایی، مثلاً دو اتو با درجه حرارت های متفاوت را در نظر بگیرید. فاصله‌ای که در آن، دیگر اصلاً گرمای اتو را احساس نکنیم ، برای این دو اتو متفاوت است، به عبارت دیگر، بی نهایت برای این دو اتو تفاوت دارد.
اما مفهوم بی نهایت، در ریاضیات کاملاً متفاوت با بی نهایت فیزیکی است. در ریاضیات می‌گوییم: « بی نهایت مقداری است که از هر مقدار دیگر بیشتر است.» به عنوان مثال، بی نهایت را در اعداد طبیعی در نظر می‌گیریم و می‌گوییم : بی نهایت از ۱، ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ و هر عدد دیگر که در نظر بگیرید، بزرگتر است.
این مفهوم، دقیقا همان مفهومی است که در «حد در بی نهایت» در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال، در تابع، وقتی می‌گوییم، یعنی این که x از هر عدد انتخاب شده بزرگتر است.
یکی از مهم‌ترین مباحثی که بی نهایت درآن دارای کاربرد است، نظریه مجموعه هاست . به عنوان مثال می‌دانیم که تعداد اعضای مجموعه اعداد حقیقی و مجموعه اعداد صحیح و طبیعی و ... بی نهایت است. (تعداد اعضای هر مجموعه را عدد اصلی می‌نامند) در ریاضیات پیشرفته ثابت می‌شود که عدد اصلی مجموعه اعداد حقیقی و صحیح با یکدیگر برابر نیست.

بی‌نهایت مطلق

کانتور بی‌نهایت‌های دیگری با خواصی بسیار عجیب تر را نیز یافته بود. " الف- یک " عددی آنچنان بزرگ است که هرگز نمی‌توان به آن رسید، حتی اگر شما تا ابد به شمردن ادامه دهید. پس از آن، تعداد بی‌نهایتی از الف‌ها و سایر بی‌نهایت‌ها وجود دارند که سرانجام به بی‌نهایتی می‌رسند که همه بی‌نهایت‌های دیگر را زیر چتر خود دارد. کانتور آن را" بی‌نهایت مطلق "

نامیده بود. این بی‌نهایت چنان وسیع و بی کران است که اصلا نمی‌توان آن را توصیف کرد. در واقع، تعریف آن بر این اندیشه استوار است که هر تلاشی برای توصیف آن، همواره به توصیف چیزی کوچکتر می‌انجامد .

آخرین یافته‌ها در مورد بی‌نهایت

حدود یک قرن طول کشیده است تا ریاضیدانان روشهایی را برای سر و کله زدن با بی‌نهایت بیابند که در میانه راه آنها را به دیوانگی نکشاند. در اوایل دهه ۱۹۷۰، ریاضیدانان انگلیسی جان کانوی که هم اکنون در دانشگاه پرینستون حضور دارد، گونه جدیدی از اعداد را موسوم به " اعداد فراواقعی " کشف کرد که علاوه بر تمامی اعداد معمول، اعداد موسوم به ترانهایت و بسیاری از اعداد عادی دیگر را نیز شامل می‌شود. در نتیجه این کشف، ریاضیدانان هم اکنون می‌توانند به عنوان مثال، ریشه دوم بی‌نهایت را محاسبه کنند و یا لگاریتم آن را به دست آورند .بدون اینکه به پاسخ هایی کاملا بی‌معنا دست یابند .
حتی با این وجود نیز اغلب ریاضیدانان مایلند کاری به کار بی‌نهایت نداشته باشند. بی‌نهایت یک مشکل آفرین واقعی است ، که می‌تواند پرسشهای معقول را به پاسخ هایی کاملا بی ربط و غیر عادی همچون ۱=۰ تبدیل کند. اما دانشمندانی که در ماهیت بنیادی عالم کند و کاو می‌کنند ، در محاسبات خود مرتب به بی‌نهایت برخورد می‌کنند .معمولا در چنین مواقعی آنها باید تسلیم بی‌نهایت شوند، و یا اینکه برای بیرون راندن بی‌نهایت مزاحم از نتیجه محاسبات خود عذری بتراشند که در نهایت کار جالبی نیست. اما ریاضیدانان برجسته‌ای همچون کانوی و مارتین کروسکال از دانشگاه را تجرز در نیوجرسی، امیدوارند که روزی اعداد فراواقعی دانشمندان را در برخورد با این مسائل مربوط به بی‌نهایت یاری دهند، و به آنها امکان دهند تا پاسخ هایی واقعی را برای معماهای عالم بیابند، البته به شرط آنکه کلانجار رفتن با این مسائل آنها را دیوانه نکرده باشد.

« بی نهایت بهانه ای است برای آموختن. آموختن آنچه می دانیم و آنچه نمی دانیم. در این عصر استرس می خواهیم لذت ببریم. از گفتن و شنیدن. از فکر کردن. هدف، آموختن مقدار زیادی مطلب نیست بلکه مقصود اینست که از آن اندکی که می آموزیم به فکر کردن به شیوه ریاضی و منطقی برسیم و درک کنیم که زیبا فکر کردن چگونه است. بر آنیم که ریاضی بیاموزیم اما نه برای ریاضیدان شدن بلکه برای خردمند شدن. پس از اندک خویش خجل و از بسیاری باقی هراسان نباشیم. »

منابع:

ریاضیات چیست؟ ریچارد کوارنت و هربرت رابینز ، ترجمه حسن صفاری
مجله دانشمند
www. daneshnameh.roshd.ir
http://www.eduphysics.com
www.wikipedia.org
www.hupaa.com